УДК 502/504: 556.16
AGRIS U10
https://doi.org/10.33619/2414-2948/132/02

С УЧЕТОМ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ОЧИСТКИ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ

©Сапарова Г. Б., *SPIN-код: 2512-5755, канд. физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан*
©Абылкасымова Г. Ы., *SPIN-код: 7643-5801, Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан*
©Бексариева Ж. Ж., *Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан*

STOCHASTIC MODEL FOR OPTIMAL CONTROL OF WATER RESOURCE TREATMENT UNDER RANDOM DISTURBANCES

©Saparova G., *SPIN-code: 2512-5755, Ph.D., Osh Technological University named after M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan*
©Abylkasymova G., *SPIN-code: 7643-5801, Osh Technological University named after M. Adysheva, Osh, Kyrgyzstan*
©Beksarieva Zh., *Osh Technological University named after M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan*

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления процессом очистки водных ресурсов в условиях стохастической неопределенности. Разработана математическая модель динамики загрязнения, основанная на стохастическом дифференциальном уравнении, учитывающем случайные внешние воздействия. Также сформулирована задача оптимального управления с квадратичным функционалом качества, отражающим компромисс между уровнем загрязнения и затратами на очистку. Применяя принцип максимума Понтрягина для стохастических систем, получены условия оптимальности управления. Решен пример с помощью численного моделирования. Полученные результаты могут быть применены при разработке экологически обоснованных стратегий управления водными ресурсами.

Abstract. This study addresses the problem of optimal control of water resource treatment under stochastic uncertainty and random external disturbances. A mathematical model describing the dynamics of water pollution is developed in the form of a stochastic differential equation, which accounts for the influence of random environmental factors on the treatment process. The corresponding optimal control problem is formulated using a quadratic performance functional that characterizes the trade-off between minimizing the pollution level and reducing the costs associated with water treatment. The stochastic Pontryagin maximum principle is applied to derive the necessary optimality conditions for the control strategy. A numerical example is presented to demonstrate the applicability of the proposed model and to evaluate the resulting optimal control strategy under stochastic disturbances. The obtained results demonstrate the potential of the proposed approach for developing environmentally sound and economically efficient strategies for water resource management under uncertainty.

Ключевые слова: оптимизация; очистка воды, дифференциальные уравнения, экологическое моделирование, стохастическое управление.

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 12. №11 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/132

Keywords: optimization; water purification, differential equations, environmental modeling, stochastic control.

Современные подходы к анализу и управлению экологическими системами активно применяют методы математического моделирования, с помощью которых можно формализовать динамику загрязнения и оценивать эффективность различных стратегий воздействия. Очень широко для таких моделей применяются дифференциальные уравнения, которые описывают изменения концентрации загрязняющих веществ во времени под воздействием природных и техногенных факторов. Но в реальности экологические процессы характеризуются высокой степенью неопределенности, связанной с вариабельностью поступления загрязнений, климатическими условиями и случайными внешними воздействиями. Одним из актуальных экологических задач современности является проблема загрязнения водных ресурсов, что обусловлено ростом антропогенной нагрузки, индустриализацией и увеличением объемов сточных вод. Загрязнение и ухудшение качества воды оказывают большое влияние на состояние экосистемы, здоровье населения и биоразнообразие; все это требует разработки эффективных методов для управления процессами очистки и восстановления водных объектов. В связи с этим большую актуальность приобретает использование стохастических моделей, учитывающих случайный характер внешних возмущений. Применение стохастических дифференциальных уравнений позволяет адекватно описывать динамику экологических систем и учитывать вероятностную природу процессов загрязнения и самоочищения водных ресурсов. Существенный вклад в развитие теории оптимального управления внесли такие работы, которые основаны на принципе максимума Понтрягина и методах динамического программирования.

Математическая модель процесса загрязнения. Построим математическую модель динамики уровня загрязнения водного объекта во времени. Пусть $x(t)-$ концентрация загрязняющего вещества в момент времени t . А $u(t)-$ управляющее воздействие интерпретируется как интенсивность очистки. Данная модель задается стохастическим дифференциальным уравнением, с учетом случайных внешних воздействий:

$$dx(t) = [ax(t) - bu(t)]dt + \sigma x(t)dW(t),$$

$a-$ коэффициент естественного накопления загрязнения; $b-$ эффективность очистки; $\sigma-$ интенсивность случайных возмущений; $W(t)-$ винеровский процесс.

Начальное условие:

$$x(0) = x_0.$$

Полученная модель отражает как детерминированную динамику загрязнения, так и случайные колебания, вызванные внешними факторами.

Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим функционал качества вида:

$$J(u) = E\left[\int_0^T (x^2(t) + cu^2(t))dt\right],$$

где $c > 0-$ коэффициент стоимости управления.

Цель управления – минимизация уровня загрязнения при ограниченных ресурсах на очистку. Найти управления $u^*(t)$, минимизирующего функционал $J(u)$.

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 12. №11 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/132

Метод решения задачи

Для решения задачи применяется принцип максимума Понтрягина для стохастических систем. Введем гамильтониан:

$$H = x^2 + cu^2 + \lambda(ax - bu),$$

где $\lambda(t) -$ сопряженная переменная.

Условие оптимальности будет:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2cu - b\lambda = 0.$$

Отсюда получаем оптимальное управление вида:

$$u^*(t) = \frac{b}{2c}\lambda(t).$$

Имеем сопряженное уравнение вида:

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Так как, имеем

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 2x + a\lambda,$$

то получаем:

$$\lambda'(t) = -2x(t) - a\lambda(t).$$

В итоге получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} dx(t) = \big(ax(t) - bu(t)\big)dt + \sigma dW(t), \\ \lambda'(t) = -2x(t) - a\lambda(t), \\ u^*(t) = \dfrac{b}{2c}\lambda(t). \end{cases}$$

Подставляя оптимальное управление в уравнение состояния, получаем:

$$dx(t) = \left[ax(t) - \frac{b^2}{2c}\lambda(t)\right]dt + \sigma dW(t).$$

То есть окончательно получили систему:

$$\begin{cases} dx(t) = \left[ax(t) - \dfrac{b^2}{2c}\lambda(t)\right]dt + \sigma dW(t), \\ \lambda'(t) = -2x(t) - a\lambda(t). \end{cases}$$

Таким образом, данная задача сводится к системе взаимосвязанных уравнений состояния и сопряженной переменной.

Численное моделирование. Чтобы вычислить численное решение применяется метод Эйлера – Маруямы для стохастических дифференциальных уравнений.

Разобьем интервал $[0; T]$ на N частей:

$$\Delta t = \frac{T}{N}.$$

Для винеровского процесса получаем:

$$\Delta W_k = \sqrt{\Delta t}\ \cdot \xi_k,$$

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 12. №11 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/132

где

$$\xi_k \sim N(0;1).$$

Тогда уравнение состояния дискретизируется в виде:

$$x_{k+1} = x_k + (ax_k - bu_k)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\ \cdot \xi_k.$$

Получили оптимальное управление на каждом шаге:

$$u_k^* = \frac{b}{2c}\lambda_k,$$

Тогда сопряженное уравнение будет иметь вид:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + (-2x_k - b\lambda_k)\Delta t.$$

В итоге получили алгоритм решения:

$$u_k = \frac{b}{2c}\lambda_k,$$
$$x_{k+1} = x_k + (ax_k - bu_k)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\ \cdot \xi_k,$$
$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + (-2x_k - b\lambda_k)\Delta t.$$

Даны параметры модели:- $a = 0.1$, - $b = 0.5$, - $\sigma = 0.2$, - $c = 1$, - $x_0 = 10$, - $T = 5$. Рассматриваем функционал:

$$J(u) = E\left[\int_0^5 (x^2(t) + u^2(t))dt\right].$$

Стохастическая модель имеем вид:

$$dx(t) = [0.1x(t) - 0.5u(t)]dt + 0.2dW(t).$$

Оптимальное управление

Для линейно – квадратичной задачи удобно записать сопряженную переменную в форме:

$$\lambda(t) = 2\Lambda(t)x(t).$$

Тогда имеем, $u^*(t) = \frac{b}{2c}\lambda(t) = 0.25\lambda(t) = 0.5\Lambda(t)x(t)$.

Функция $\Lambda(t)$ находится с помощью уравнения Риккати:

$$-\dot{\Lambda}(t) = 2a\Lambda(t) - \frac{b^2}{c}\Lambda^2(t) + 2,$$

или при параметрах:

$$-\dot{\Lambda}(t) = 0.2\Lambda(t) - 0.25\Lambda^2(t) + 2,$$

с конечным условием:

$$\Lambda(5) = 0.$$

Численное решение дает результат:

$$\Lambda(5) \approx 3.2506.$$

Значит, в начальный момент имеем:

$$\lambda(0) = 2\Lambda(t)x_0,$$
$$\lambda(0) = 2 \cdot 3.2506 \cdot 10 \approx 65.0116.$$

Отсюда, получаем начальное оптимальное управление:

$$u^*(0) = 0.25\lambda(0) \approx 16.253.$$

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 12. №11 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/132

Динамика загрязнения. После подстановки оптимального управления, имеем:

$$dx(t) = [0.1 - 0.25\Lambda(t)]x(t)dt + 0.2dW(t).$$

В среднем случайный элемент имеет математическое ожидание равное 0, поэтому средняя траектория уменьшается. В итоге получаются значения, представленные ниже в Таблице.

t	$x(t)$	$\Lambda(t)$	$\lambda(t)$	$u^*(t)$
0	10.000	3.251	65.012	16.253
1	4.912	3.232	31.750	7.938
2	2.438	3.154	15.382	3.846
3	1.262	2.852	7.198	1.799
4	0.756	1.879	2.843	0.711
5	0.654	0	0	0

Таким образом, уровень загрязнения понижается примерно с 10 до 0.654. А интенсивность очистки постепенно уменьшается от 16.253 до 0.

Значение функционала. Для средней (детерминированной) траектории численное решение равна:

$$J(u^*) \approx 254.10.$$

Результаты моделирования показывают: снижение уровня загрязнения со временем; стабилизацию системы; влияние стохастических возмущений на траекторию.

Заключение

Разработана стохастическая модель оптимального управления процессом очистки водных ресурсов. Сформулирована и численно решена задачи оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина. В процессе управления интенсивность очистки постепенно снижается и к конечному моменту достигает нулевого значения. Полученные результаты демонстрируют эффективность оптимального управления при наличии случайных возмущений и подтверждают возможность применения стохастического подхода для моделирования процессов очистки водных ресурсов.

Список литературы:

1. Валиев В. С., Шамаев Д. Е., Иванов Д. В. Вероятностные подходы к оценке загрязненности поверхностных вод // Российский журнал прикладной экологии. 2021. № 3. С. 36–42. https://doi.org/10.24852/2411-7374.2021.3.36.42

2. Степанов С. В., Харькина О. В., Авдеенков П. П., Лазунин М. В., Пономаренко О. С. Математическое моделирование процессов очистки сточных вод в аэротенках // Водоснабжение и санитарная техника. 2024. №9. https://doi.org/10.35776/VST.2024.09.04

3. Сапарова Г. Б., Абылкасымова Г. Ы., Айдаралиева Ч. Прогнозирование динамики случайных процессов с помощью цепей Маркова // Научно-методический журнал. 2026. №2(169). С. 5-9.

4. Сизов А. А., Серпокрылов Н. С., Каменев Я. Ю. Методика выбора технологии очистки периодических сбросов сточных вод // Градостроительство и архитектура. 2011. Т. 1. №4. С. 60–64. https://doi.org/10.17673/Vestnik.2011.04.12

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

5. Мурачев Е. Г., Холодов Г. М., Солопова О. И. Методика построения системы управления технологическим процессом биологической очистки сточных вод на основе гибридных нейронных сетей // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2009. Т. 1. №2. С. 231-241. https://doi.org/10.17816/2074-0530-69728

6. Баженов В. И. Математическое моделирование гидродинамических и водоочистных процессов // Яковлевские чтения. 2014.

7. Ийлунь В. Синтез оптимального управления в задаче регулирования степени загрязнения озера // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18. №2. С. 279-286. https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.279-286

References:

1. Valiev, V. S., Shamaev, D. E., & Ivanov, D. V. (2021). Veroyatnostny`e podxody` k ocenke zagryaznennosti poverxnostny`x vod. *Rossijskij zhurnal prikladnoj e`kologii,.* (3), 36–42. (in Russian). https://doi.org/10.24852/2411-7374.2021.3.36.42

2. Stepanov, S. V., Xar`kina, O. V., Avdeenkov, P. P., Lazunin, M. V., & Ponomarenko, O. S. (2024). Matematicheskoe modelirovanie processov ochistki stochny`x vod v ae`rotenkax. *Vodosnabzhenie i sanitarnaya texnika,* (9), 22. (in Russian). https://doi.org/10.35776/VST.2024.09.04

3. Saparova, G. B., Aby`lkasy`mova, G. Y`., & Ajdaralieva, Ch. (2026). Prognozirovanie dinamiki sluchajny`x processov s pomoshh`yu cepej Markova. *Nauchno-metodicheskij zhurnal,* (2(169)), 5-9. (in Russian).

4. Sizov, A. A., Serpokry`lov, N. S., & Kamenev, Ya. Yu. (2011). Metodika vy`bora texnologii ochistki periodicheskix sbrosov stochny`x vod. *Gradostroitel`stvo i arxitektura, 1*(4), 60–64. (in Russian). https://doi.org/10.17673/Vestnik.2011.04.12

5. Murachev, E. G., Xolodov, G. M., & Solopova, O. I. (2009). Metodika postroeniya sistemy` upravleniya texnologicheskim processom biologicheskoj ochistki stochny`x vod na osnove gibridny`x nejronny`x setej. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta MAMI, 1*(2), 231-241. (in Russian). https://doi.org/10.17816/2074-0530-69728

6. Bazhenov, V. I. (2014). Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamicheskix i vodoochistny`x processov. Yakovlevskie chteniya. (in Russian).

7. Ijlun`, V. (2022). Sintez optimal`nogo upravleniya v zadache regulirovaniya stepeni zagryazneniya ozera. *Sovremenny`e informacionny`e texnologii i IT-obrazovanie, 18*(2), 279-286. (in Russian). https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.279-286

Поступила в редакцию
01.09.2026 г.

Принята к публикации
16.09.2026 г.

Ссылка для цитирования:

Сапарова Г. Б., Абылкасымова Г. Ы., Бексариева Ж. Ж. С учетом случайных возмущений стохастическая модель оптимального управления процессом очистки водных ресурсов // Бюллетень науки и практики. 2026. Т. 12. №11. С. 22-27. https://doi.org/10.33619/2414-2948/132/02

Cite as (APA):

Saparova, G., Abylkasymova, G., & Beksarieva, Zh. (2026). Stochastic Model for Optimal Control of Water Resource Treatment under Random Disturbances. *Bulletin of Science and Practice, 12*(11), 22-27. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/132/02

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)